

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 14

Algebry Banacha i widmo

$$\text{algebra} \equiv \left(\begin{array}{l} \text{przestrzeń liniowa} + \\ \text{pierścień} + \text{łączność} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, & a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), & (\lambda a) \cdot b &= a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b). \end{aligned}$$

Motywacja. Niech X będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Przestrzeń liniowych operatorów ograniczonych $B(X)$ jest nie tylko przestrzenią Banacha, ale też algebrą z mnożeniem zdefiniowanym jako złożenie operatorów:

$$T, S \in B(X) \implies T \circ S \in B(X) \text{ oraz } \|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

bo $\|T \circ S\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(Sx)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T\| \|Sx\| = \|T\| \cdot \|S\|$.
Operator identycznościowy $1 \in B(X)$ jest jedynką w tej algebrze:
 $1 \circ T = T \circ 1 = T$, oraz $\|1\| = 1$.

Def. Algebrą nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazywamy przestrzeń liniową A nad $\mathbb{F}$ wraz z operacją mnożenia $\cdot : A \times A \rightarrow A$, która jest dwuliniowa i łączna. **Algebrą Banacha** nazywamy algebrę A , która jest przestrzenią Banacha oraz norma jest submultiplikatywna, tzn.

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad a, b \in A.$$

Jeśli mnożenie w A posiada element neutralny, to nazywamy go **jedynką** algebry i oznaczamy 1 . Zakładamy wtedy też, że $\|1\| = 1$. Algebra A jest **przemienna**, jeśli mnożenie w A jest przemienne.

Prz. Algebry operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X

$B(X)$ jest algebrą Banacha z 1 (nieprzemiennej jeśli $\dim(X) > 1$).
Każda domknięta podalgebra $A \subseteq B(X)$ jest algebrą Banacha.

Prz. Algebra funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej M

Przestrzeń $C(M)$ z normą $\|a\|_\infty = \sup_{t \in M} |a(t)|$, jest algebrą Banacha z mnożeniem zdefiniowanym punktowo

$$(a \cdot b)(t) := a(t)b(t), \quad a, b : M \rightarrow \mathbb{F}.$$

Jest to algebra przemienne z jedyneką $1 \in C(M)$ (funkcja stała).

Prz. Algebra z mnożeniem zerowym

Na dowolnej przestrzeni Banacha X można zdefiniować mnożenie wzorem $x \cdot y := 0$ dla $x, y \in X$. Wtedy X jest algebrą Banacha. Jest to algebra przemienne bez jedynek (ekstremalny przykład).

Od tej pory zakładamy, że

rozważane przez nas algebry Banacha mają jedynekę!

Def. Zbiór elementów odwracalnych w A oznaczamy przez

$$\text{Inv}(A) := \{a \in A : \exists_{b \in A} ab = ba = 1\}.$$

Jeżeli $a \in \text{Inv}(A)$ i $b \in A$ spełniają $ab = ba = 1$, to piszemy $b = a^{-1}$ i nazywamy **elementem odwrotnym** do a .

Uw. $\text{Inv}(A)$ tworzy grupę, której elementem neutralnym jest $1 \in A$

$$a, b \in \text{Inv}(A) \implies \begin{cases} ab \in \text{Inv}(A) \text{ oraz } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \\ a^{-1} \in \text{Inv}(A) \text{ oraz } (a^{-1})^{-1} = a. \end{cases}$$

Prz. Jeśli $A = B(X)$ algebra operatorów na to przestrzeni Banacha X

$$\text{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \rightarrow X \text{ bijekcja}\}.$$

Prz. Jeśli $A = C(M)$ algebra funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej M

$$\text{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : a(t) \neq 0 \text{ dla każdego } t \in M\}.$$

Lemat Neumanna

Niech A będzie algebrą Banacha z jedyneką $1 \in A$.

$$\forall a \in A \quad \|a\| < 1 \implies 1 - a \in \text{Inv}(A) \text{ oraz } (1 - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Dowód: Niech $\|a\| < 1$ i połóżmy $S_n = \sum_{k=0}^n a^k$. Dla $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a\|^k = \frac{\|a\|^{n+1}}{1 - \|a\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Czyli $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy w A . Zatem $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ jest zbieżny w A .

Skoro $\|a^n\| \leq \|a\|^n \rightarrow 0$, to $a^n \rightarrow 0$. Stąd

$$\begin{aligned} (1 - a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a) \sum_{k=0}^n a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - a^{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Analogicznie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k (1 - a) = 1$. Czyli $(1 - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$.



Wn. Elementy oddalone od $1 \in A$ o mniej niż jeden są odwracalne:

$$\{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subseteq \text{Inv}(A).$$

Dowód: Jeśli $\|1 - a\| < 1$, to $a = 1 - (1 - a) \in \text{Inv}(A)$. ■

Tw. Dla każdej algebry Banacha A zbiór $\text{Inv}(A)$ jest otwarty w A i odwzorowanie $\text{Inv}(A) \ni a \mapsto a^{-1} \in \text{Inv}(A)$ jest analityczne. 

Def. Widmem (spektrum) elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv}(A)\}.$$

Prz. Widmo elementu algebry funkcji na przestrzeni zwartej M

Jeśli $A = C(M)$, to $\text{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : \forall_{t \in M} a(t) \neq 0\}$ i

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M} (a - \lambda 1)(t) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M} a(t) = \lambda\} = a(M)\end{aligned}$$

Zatem **widmo funkcji** $a \in C(M)$ **jest obrazem tej funkcji.**

Prz. Widmo operatora działającego na przestrzeni Banacha X

Skoro $\text{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \rightarrow X \text{ bijekcja}\}$ to **widmo operatora** $T \in B(X)$ wyraża się wzorem

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda 1 \text{ odwzorowanie nieodwracalne}\}.$$

Czyli $\lambda \in \sigma(T) \iff$ zachodzi któryś z warunków:

- a) $T - \lambda 1$ nie jest surjekcją.
- b) $T - \lambda 1$ nie jest iniekcją $\iff \ker(T - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \exists_{x \in X \setminus \{0\}} Tx = \lambda x \iff \lambda$ jest **wartością własną** dla T .

Jeśli $\dim(X) = n < \infty$, to (a) i (b) są równoważne i wtedy

$$\sigma(T) = \text{„zbiór wartości własnych operatora } T\text{”}.$$

Ponadto, mamy wtedy izomorfizm algebr $B(X) \cong M_n(\mathbb{F})$ oraz $\text{Inv}(M_n(\mathbb{F})) = \{T \in M_n(\mathbb{F}) : \det(T) \neq 0\}$. Zatem dla $T \in M_n(\mathbb{F})$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \det(T - \lambda 1) = 0\}.$$